OUTILS MATHÉMATIQUES ET AUTRES PROPRIÉTÉS

1. Coordonnées

En plus des coordonnées cartésiennes, il existe d'autres types de coordonnées dont l'utilisation permet de simplifier considérablement des calculs lorsque le problème présente une certaine géométrie ou certains types de symétries.

1.1 Coordonnées cylindriques

$$\boxed{x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\sin\phi,\ z = z}$$

avec $\rho \in [0,R]$, $\phi \in [0,2\pi]$, $et\ z \in [0,h]$.

1.2 Coordonnées sphériques

$$\boxed{x = r\sin\theta\cos\phi,\ y = r\sin\theta\sin\phi,\ z = r\cos\theta}$$

avec $r \in [0,R]$, $\phi \in [0,2\pi]$, $et\ \theta \in [0,\pi]$.

2. Calcul de déterminants

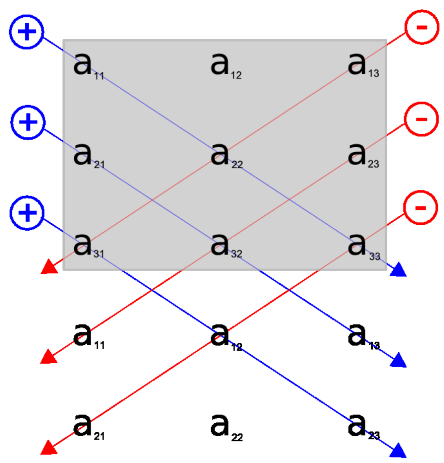
2.1 Déterminants 2x2

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc}$$

2.2 Déterminants 3x3

2.2.1 Règle de Sarrus

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$



2.2.2 Méthode classique (sous-matrices)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ \square & e & f \\ \square & h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ d & \square & f \\ g & \square & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ d & e & \square \\ g & h & \square \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

3. Inverse d'une matrice 2x2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $\det A \neq 0$, alors son inverse A^{-1} est donnée par

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

4. Produit vectoriel

Dans $\mathbb{R}^3$, le produit vectoriel de deux vecteurs quelconques $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ donne un troisième vecteur $\mathbf{w}$ perpendiculaire aux deux premiers. Si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont colinéaires, le produit vectoriel $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ donne le vecteur nul. Voici quelques unes de ses propriétés:

a) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$

b) $\alpha\mathbf{a} \wedge \beta\mathbf{b} = \alpha\beta\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

c) $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$

Il existe plusieurs façons de calculer un produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$. En voici quelques unes:

2.1 Notons d'abord $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = u_1\mathbf{e_1} + u_2\mathbf{e_2} + u_3\mathbf{e_3}$ et $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1\mathbf{e_1} + v_2\mathbf{e_2} + v_3\mathbf{e_3}$. On a alors

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{e_1} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{e_2} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\mathbf{e_3}$$

Cette méthode est la plus simple lorsqu'aucune composante des vecteurs n'est nulle.

2.2 Lorsque l'un des vecteurs (ou les deux) n'a/n'ont qu'une seule composante non-nulle (ou maximum deux), le plus simple est d'utiliser les propriétés du produit vectoriel pour n'avoir à calculer que le produit vectoriel de deux vecteurs de base. Pour illustrer cette méthode, prenons deux **exemples**:

• Soient $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = u_1\mathbf{e_1}$ et $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = v_2\mathbf{e_2}$. On a alors

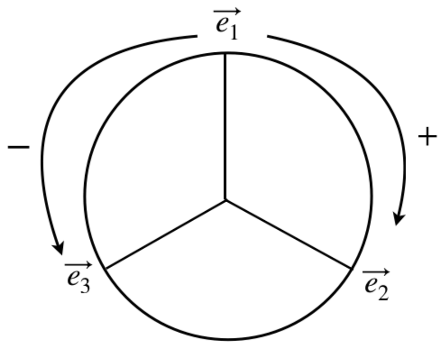
$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = u_1\mathbf{e_1} \wedge v_2\mathbf{e_2} \overset{(b)}{=} u_1v_2\,\underbrace{\mathbf{e_1} \wedge \mathbf{e_2}}_{\text{voir 2.3}} = u_1v_2\mathbf{e_3}$.

• Soient $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = u_1\mathbf{e_1} + u_2\mathbf{e_2}$ et $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = v_2\mathbf{e_2}$. On a alors dans ce cas

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (u_1\mathbf{e_1} + u_2\mathbf{e_2}) \wedge v_2\mathbf{e_2} \overset{(a)}{=} u_1\mathbf{e_1} \wedge v_2\mathbf{e_2} + u_2\mathbf{e_2} \wedge v_2\mathbf{e_2} \overset{(b)}{=} u_1v_2\underbrace{\mathbf{e_1} \wedge \mathbf{e_2}}_{\text{voir 2.3}} + u_2v_2\underbrace{\mathbf{e_2} \wedge \mathbf{e_2}}_{=\mathbf{0}} = u_1v_2\mathbf{e_3}$$

2.3 Technique Mercedes (produit vectoriel de vecteurs de base)

Si vous ne savez pas calculer un produit vectoriel entre deux vecteurs de base (que ce soit en coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques), ou que vous n'êtes pas sûr du signe de ce produit, vous pouvez utiliser la méthode suivante:



1) Dessiner le logo Mercedes
2) Placer les vecteurs unitaires du repère utilisé sur chacun des sommets, dans l'ordre, dans le sens des aiguilles d'une montre
3) Calcul du produit vectoriel direct: $\mathbf{e_1} \wedge \mathbf{e_2} = \mathbf{e_3}$, $\mathbf{e_2} \wedge \mathbf{e_3} = \mathbf{e_1}$ (**positif** dans le sens des aiguilles d'une montre); $\mathbf{e_1} \wedge \mathbf{e_3} = -\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_2} \wedge \mathbf{e_1} = -\mathbf{e_3}$ (**négatif** dans le sens trigonométrique)

ATTENTION A L'ORDRE DES VECTEURS

Toute permutation circulaire des vecteurs est possible, mais il y a un certain ordre à respecter de façon à ce que le produit vectoriel de deux vecteurs de base reste le même d'une permutation à l'autre:

Coordonnées cartésiennes: $\mathbf{e_1} = \hat{\mathbf{x}}$, $\mathbf{e_2} = \hat{\mathbf{y}}$, $\mathbf{e_3} = \hat{\mathbf{z}}$

Coordonnées cylindriques: $\mathbf{e_1} = \mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e_2} = \mathbf{e}_\phi$, $\mathbf{e_3} = \mathbf{e_z}$ ou

$$\mathbf{e_1} = \mathbf{e_z},\ \mathbf{e_2} = \mathbf{e}_\rho,\ \mathbf{e_3} = \mathbf{e}_\phi \text{ ou}$$

$$\mathbf{e_1} = \mathbf{e}_\phi,\ \mathbf{e_2} = \mathbf{e_z},\ \mathbf{e_3} = \mathbf{e}_\rho$$

Coordonnées sphériques: $\mathbf{e_1} = \mathbf{e_r}$, $\mathbf{e_2} = \mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e_3} = \mathbf{e}_\phi$ ou

$\mathbf{e_1} = \mathbf{e}_\phi$, $\mathbf{e_2} = \mathbf{e_r}$, $\mathbf{e_3} = \mathbf{e}_\theta$ ou

$\mathbf{e_1} = \mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e_2} = \mathbf{e}_\phi$, $\mathbf{e_3} = \mathbf{e_r}$

4. Propriétés des sommes

5.1 $\sum_\alpha a u_\alpha = a \sum_\alpha u_\alpha$, $a \in \mathbb{R}$ si a ne dépend pas de α. u_α est le terme qui dépend de α.

5.2 $\sum_\alpha (u_\alpha + v_\alpha) = \sum_\alpha u_\alpha + \sum_\alpha v_\alpha$

5.3 $\sum_\alpha \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}_\alpha = \mathbf{a} \wedge \sum_\alpha \mathbf{b}_\alpha$, avec $\mathbf{b}_\alpha$ qui dépend de α

5.4 Soit $a_n = a_1 r^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ une suite géométrique. Si $-1 < r < 1$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge vers $\frac{a_1}{1-r}$.

5. Produit scalaire

Notons $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ le produit scalaire de deux vecteurs. Comme l'indique son nom, le produit scalaire donne, à partir de deux vecteurs, une valeur scalaire. Voici quelques unes des propriétés de cette fonction:

a) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2 = v^2$, avec $\mathbf{v}$ un vecteur quelconque.

b) $\mathbf{u} \cdot a\mathbf{v} = a\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, avec $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs quelconques et $a \in \mathbb{R}$ un réel quelconque.

c) $\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = A\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, avec $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs quelconques et A une matrice $m \times n$ (ou $n \times n$).

d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$, avec $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs quelconques.

e) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$, avec $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ trois vecteurs quelconques.

6. Identités trigonométriques

6.1 $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$

6.2 $\sin(2\alpha) = 2 \sin\alpha \cos\alpha$

6.3 $\sin(\alpha/2) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

6.4 $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$

6.5 $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

6.6 $\cos(\alpha/2) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

6.7 $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

7. Propriétés des nombres complexes

7.1 On définit le nombre imaginaire i tel que $i^2 = -1$

7.2 $z = \mathfrak{R}(z) + i\mathfrak{I}(z) = x + iy = \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{|z|}\, e^{\overbrace{i \arctan\left(\frac{y}{x}\right)}^{\arg(z)}} = re^{i\theta}$

7.3 Soient z_1, z_2 deux nombres complexes. Alors $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ et $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.

7.4 On appelle le complexe conjugué de $z = x + iy$ le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$

7.5 Soient z un nombre complexe et $\bar{z}$ son complexe conjugué. Alors $z\bar{z} = |z|^2$.

Pour plus de précisions, voir les cours d'Analyse I et Analyse IV.

8. Exponentielle complexe et fonctions hyperboliques

Voici quelques unes des relations entre la fonction exponentielle $f(x) = e^x$, l'exponentielle complexe $g(\theta) = e^{i\theta}$ et les fonctions trigonométriques et hyperboliques:

7.1 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

7.2 $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

7.3 $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

7.4 $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

7.5 $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$